UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
"LISANDRO ALVARADO"
DECANATO DE INGª CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGª VIAL
BARQUISIMETO-VENEZUELA

Ingeniería Vial I (21055)
Ingº José Raúl de la Cruz F.
Sección 2017-1/51
Ingº Raúl E. de la Cruz V.
Sección 2017-1/52

ACUERDOS VERTICALES

Los tramos contiguos de pendiente constante del Alineamiento Vertical deben ser enlazados por arcos de curvas que satisfagan las exigencias de seguridad y confort que caracterizan un trazado racionalmente diseñado. Cada punto de este alineamiento está caracterizado por su distancia horizontal respecto al punto que se toma como origen (progresiva) y por su altura referida a un plano horizontal que sirve de referencia altimétrica (cota). Es así como el alineamiento vertical presenta una rasante con-formada por tramos de pendiente constante y tramos de pendiente variable. A los primeros se les designa como longitudes rectas y a los segundos como curvas o acuerdos verticales. Cabe destacar que las rectas de los alineamientos, tanto horizontal como vertical, tienen un elemento común: su longitud, pero las del horizontal se singularizan por su dirección, mientras que las del vertical lo hacen por su pendiente. Así, una longitud recta puede estar inserta, o no, en un alineamiento horizontal.

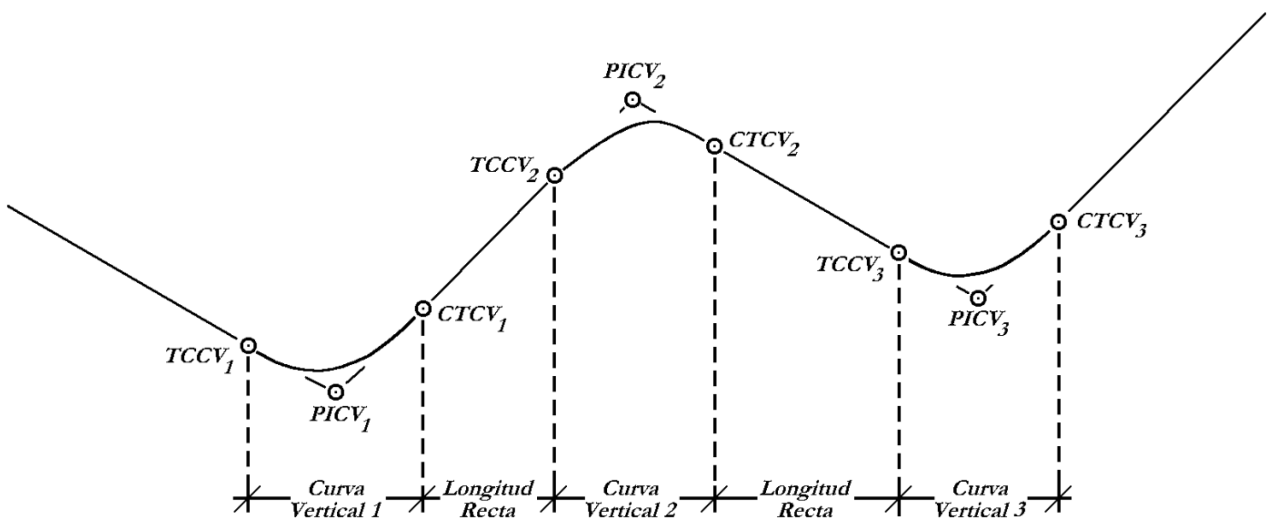


Figura 58 Alineamiento Vertical: Proyección de la rasante sobre
El Plano Vertical que contiene al alineamiento Horizontal.

De manera análoga a como se realiza la transición de curvatura horizontal (incremento constante de la aceleración centrípeta) es deseable que se verifique la transición de curvatura vertical cuando se enlazan, con arcos de una determinada curva, dos longitudes rectas contiguas. Para obtener el resultado deseado deben emplearse arcos de una curva cuya razón de variación de la pendiente, por unidad de longitud, sea constante, esto es:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = constante = C_1$$

Integrando:

$$\frac{dy}{dx} = C_1X + C_2$$

e integrando nuevamente:

$$Y = \frac{C_1X^2}{2} + C_2X + C_3$$

ecuación que corresponde a una parábola.

En el sistema viario (no el ferroviario) la curva vertical por excelencia es la parábola cuadrática de eje vertical; esta curva compite favorablemente en el aspecto cinemático con otras curvas otrora ensayadas ya que la componente horizontal del vector velocidad es constante. A las razones antes expuestas se añade la relativa sencillez de cálculo de sus elementos geométricos.

CLASIFICACIÓN DE LAS CURVAS VERTICALES

Hay dos clasificaciones a considerar: a) por el sentido de su curvatura y b) por su simetría respecto de la vertical que contiene al punto ***PICV*** donde las tangentes se intersecan. En la primera de las clasificaciones el elemento a considerar es la concavidad o convexidad generada por el desarrollo de la curvatura diferenciándose las curvas en ***convexas*** y ***cóncavas***.

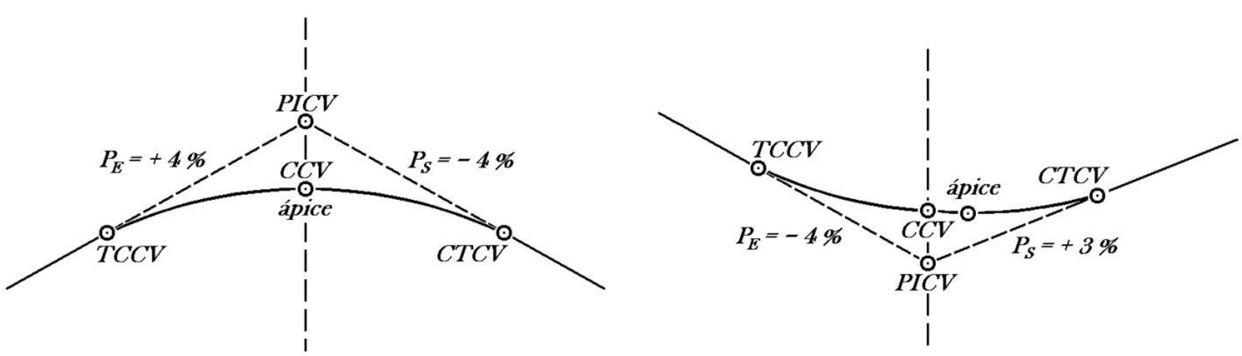


Figura 59 Curvas Verticales; Izquierda: cóncava; derecha: convexa

En la figura que antecede a este párrafo el arco de parábola empleado como enlace convexo contiene el ápice de la curva (punto de máxima cota) y éste a su vez se localiza en la vertical que contiene al $\boldsymbol{PICV}$ y al $\boldsymbol{CCV}$ (Centro de la Curva Vertical). Esta situación geométrica sólo ocurre cuando las pendientes de las tangentes a enlazar ($\boldsymbol{P_E}$ y $\boldsymbol{P_S}$) son de igual valor absoluto pero de signo contrario. En el acuerdo cóncavo de la misma figura el ápice, que se encuentra también dentro del arco de parábola, se ha desplazado a la derecha de la vertical que pasa por el $\boldsymbol{PICV}$ como consecuencia de la menor inclinación (absoluta) de la tangente de salida.

Si continuamos disminuyendo la inclinación de la pendiente de salida, hasta anularla, el ápice coincidirá plano-altimétricamente con el punto final de la curva vertical ($\boldsymbol{CTCV}$) y el corrimiento del ápice respecto de la vertical que contiene el $\boldsymbol{PICV}$ será máximo; el punto $\boldsymbol{CCV}$ siempre estará en dicha vertical.

Si continua la rotación de la tangente, ahora tomando la pendiente valores negativos pero sin sobrepasar el valor de la de entrada, el arco utilizado como acuerdo vertical no contendrá el ápice de la parábola que ahora se localizará fuera del enlace. Gráficamente la situación es la siguiente:

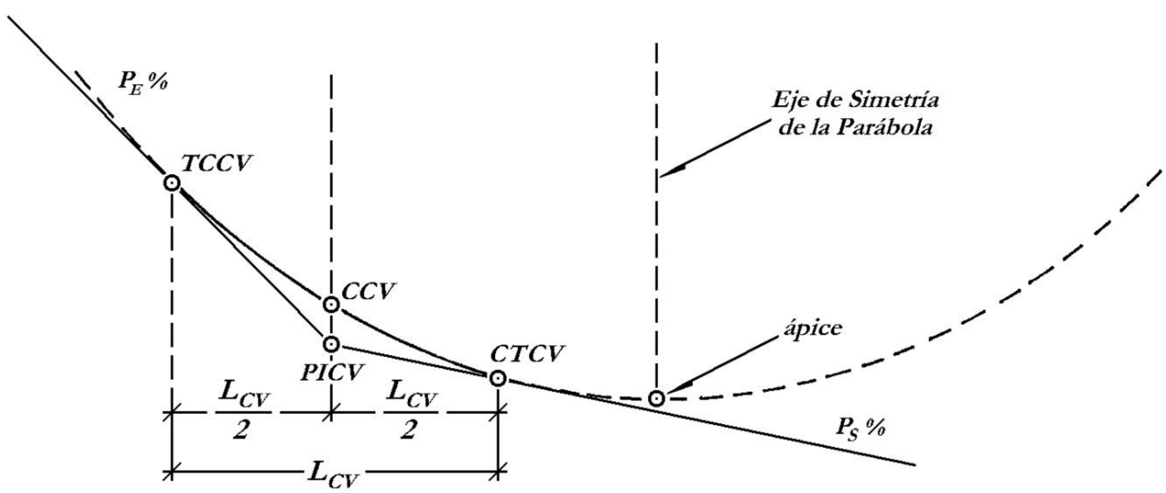


Figura 60 Acuerdo Vertical Cóncavo entre dos tangentes con pendiente negativa. $\boldsymbol{P_E} > \boldsymbol{P_S}$ (algebráicamente). Sin escalas.

En todas las situaciones hasta ahora planteadas, sean las curvas verticales convexas o cóncavas, la distancia horizontal, medida sobre el alineamiento horizontal, entre el $\boldsymbol{PICV}$ y los puntos de tangencia a cada lado del mismo, es igual y equivalente a

$L_{CV}/2$ siendo L_{CV} la longitud proyectada del arco de parábola que se emplea como enlace. Esta es otra propiedad geométrica de la parábola que nos conduce al análisis de la segunda de las clasificaciones ya mencionadas: la simetría. La figura que sigue al párrafo ilustra gráficamente los principales elementos geométricos de una curva vertical asimétrica cuya característica más resaltante la constituye el hecho de estar conformada por dos arcos de parábola (o más de dos, pero la solución, elegante en lo que respecta al análisis matemático, tiene escaso valor utilitario) de distinta curvatura y longitud, unidos en un punto de la vertical que contiene al $PICV$. Al punto de unión de los dos arcos, usualmente denominado CCV, preferimos llamarlo Punto de Unión PU, para evitar ambigüedad o confusión con el CCV de las curvas simétricas. Los enlaces verticales asimétricos, que las normas viales venezolanas no objetan pero que no son acogidos en las legislaciones viales de algunos países, son, cuando su diseño es correcto, de gran utilidad y su importancia se pone de manifiesto cuando hay necesidad de pasar por puntos control (puntos obligados del itinerario). La distancia vertical del $PICV$ al punto de unión PU de los dos arcos de parábola es la Externa E, que resulta común a ambas ramas para lograr la solución de continuidad que el trazado exige. La tangente en PU, paralela a $TCCV - CTCV$, interseca a las rectas de entrada y salida en los puntos $PICV_I$ y $PICV_D$, respectivamente. Las ramas de la curva asimétrica se convierten así en curvas simétricas de longitudes L_{CVI} y L_{CVD} y curvaturas particulares.

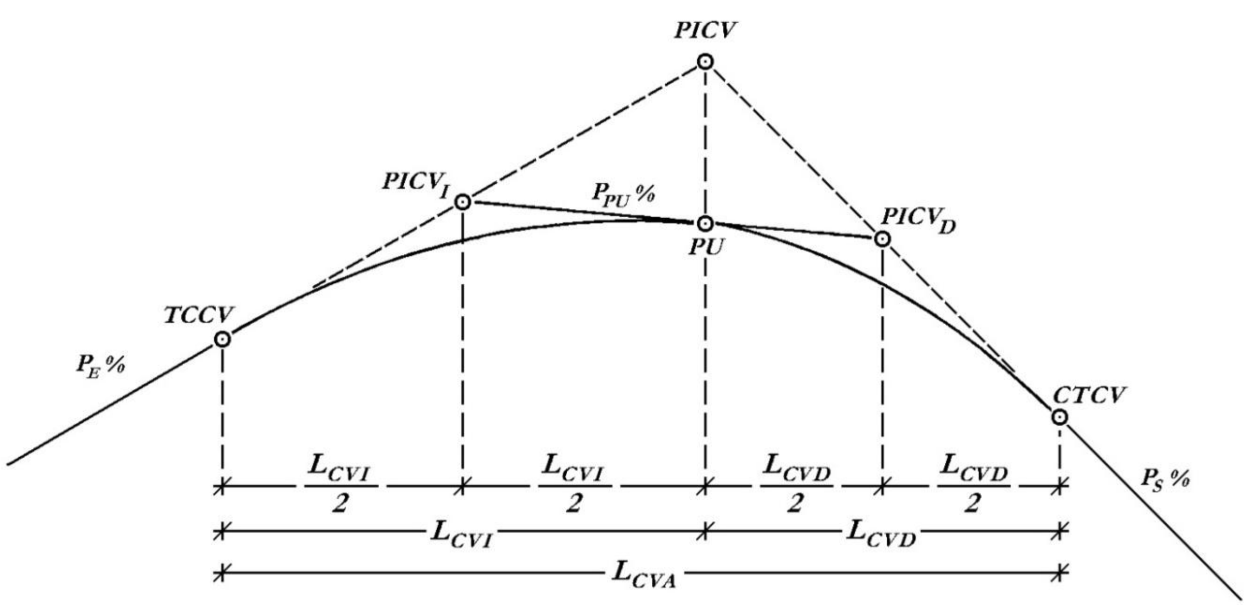


Figura 61 Curva Vertical Asimétrica Convexa. Las ramas a izquierda y derecha del PU son de distinta longitud

GEOMETRÍA DE LOS ACUERDOS VERTICALES

Hemos ya expresado que en la parábola se verifica una rata constante de cambio de la pendiente por unidad de longitud:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = constante = C_1$$

integrando se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = pendiente = C_1X + C_2$$

En el gráfico de la página 161 se observa que cuando $x = 0$ la pendiente es la de la entrada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_E}{100} \quad \therefore \quad C_2 = \frac{P_E}{100}$$

Cuando $X = L_{CV}$ la pendiente es la de salida:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_S}{100}$$

por lo que:

$$\frac{P_S}{100} = C_1\, L_{CV} + \frac{P_E}{100}$$

$$C_1\, L_{CV} = \frac{P_S}{100} - \frac{P_E}{100} = \frac{P_S - P_E}{100}$$

$$C_1 = \frac{P_S - P_E}{100 \cdot L_{CV}}$$

entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_S - P_E}{100 \cdot L_{CV}} X + \frac{P_E}{100}$$

Si integramos nuevamente se tiene:

$$Y = \frac{P_S - P_E}{100 \cdot L_{CV}}\, \frac{X^2}{2} + \frac{P_E}{100}\, X + C_3$$

De nuevo en el gráfico: cuando $X = 0 \rightarrow Y = Y_O$ por lo que $C_3 = Y_O$ y:

$$Y = Y_O + \frac{P_E}{100}\, X + \frac{(P_S - P_E)}{200 \cdot L_{CV}}\, X^2$$

Si a la diferencia algebraica de pendientes, A, la hacemos igual a: $(P_S - P_E)$, se tiene:

$$Y = Y_O + \frac{P_E}{100}\, X + \frac{A}{200 \cdot L_{CV}}\, X^2$$

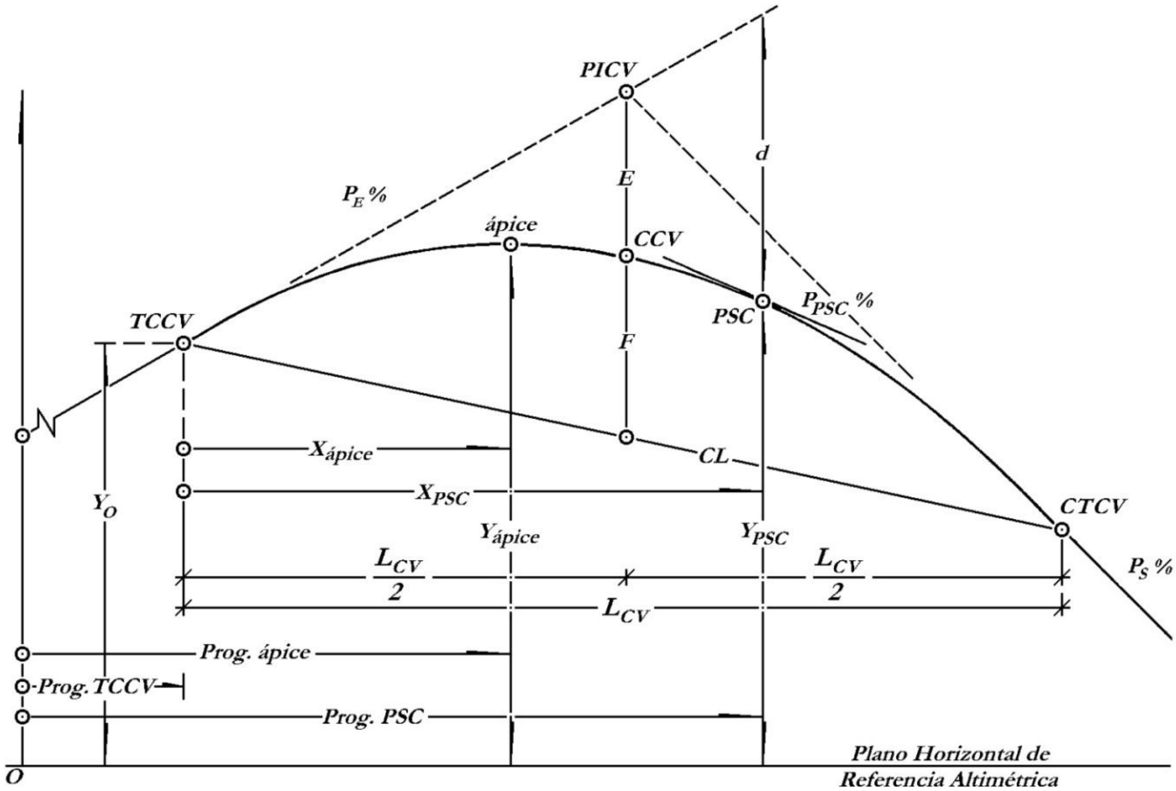


Figura 62 Elementos geométricos del Acuerdo Vertical Convexo

- L_{CV} : Longitud de la Curva Vertical
- P_E : Pendiente porcentual de la recta de entrada
- P_S : Pendiente porcentual de la recta de salida
- ***PICV*** : Intersección de las tangentes de entrada y salida
- ***TCCV*** : Punto Tangente-Curva de la curva vertical
- ***CTCV*** : Punto Curva-Tangente de la curva vertical
- ***CCV*** : Punto Central de la curva vertical
- ***PSC*** : Punto genérico en la curva vertical
- X_{PSC} : Distancia TCCV-PSC
- Y_{PSC} : Cota del PSC
- Y_O : Cota del punto TCCV
- ***d*** : Desvío bajo la tangente
- ***E*** : Externa
- ***f*** : Flecha
- ***CL*** : Cuerda Larga
- P_{PSC} : Pendiente del PSC
- P_{CL} : Pendiente de la Cuerda Larga
- $X_{ápice}$: Distancia TCCV-ápice
- $Y_{ápice}$: Cota del ápice

Donde $\boldsymbol{Y}$ es la cota de cualquier punto de la parábola (implícitamente de los puntos del arco de enlace) referida a la cota $\boldsymbol{Y_0}$ del punto ***TCCV***.

El desvío $\boldsymbol{d_{PSC}}$ bajo la tangente será:

$$\boldsymbol{d_{PSC}} = \left(\boldsymbol{Y_0} + \frac{\boldsymbol{P_E}}{\mathbf{100}}\,\boldsymbol{X_{PSC}}\right) - \boldsymbol{Y_{PSC}}$$

$$\boldsymbol{d_{PSC}} = \left(\boldsymbol{Y_0} + \frac{\boldsymbol{P_E}}{\mathbf{100}}\,\boldsymbol{X_{PSC}}\right) - \left(\boldsymbol{Y_0} + \frac{\boldsymbol{P_E}}{\mathbf{100}}\,\boldsymbol{X_{PSC}} + \frac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{200}\cdot \boldsymbol{L_{CV}}}\,(\boldsymbol{X_{PSC}})^2\right)$$

$$\boldsymbol{d_{PSC}} = -\frac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{200}\cdot \boldsymbol{L_{CV}}}\,(\boldsymbol{X_{PSC}})^2$$

Si observamos el gráfico siguiente veremos que $\boldsymbol{A}$ es negativa en las curvas convexas y positiva en las cóncavas por lo que el desvío, al adoptar distinto signo dependiendo de la curvatura del acuerdo, facilitará el cálculo matemático.

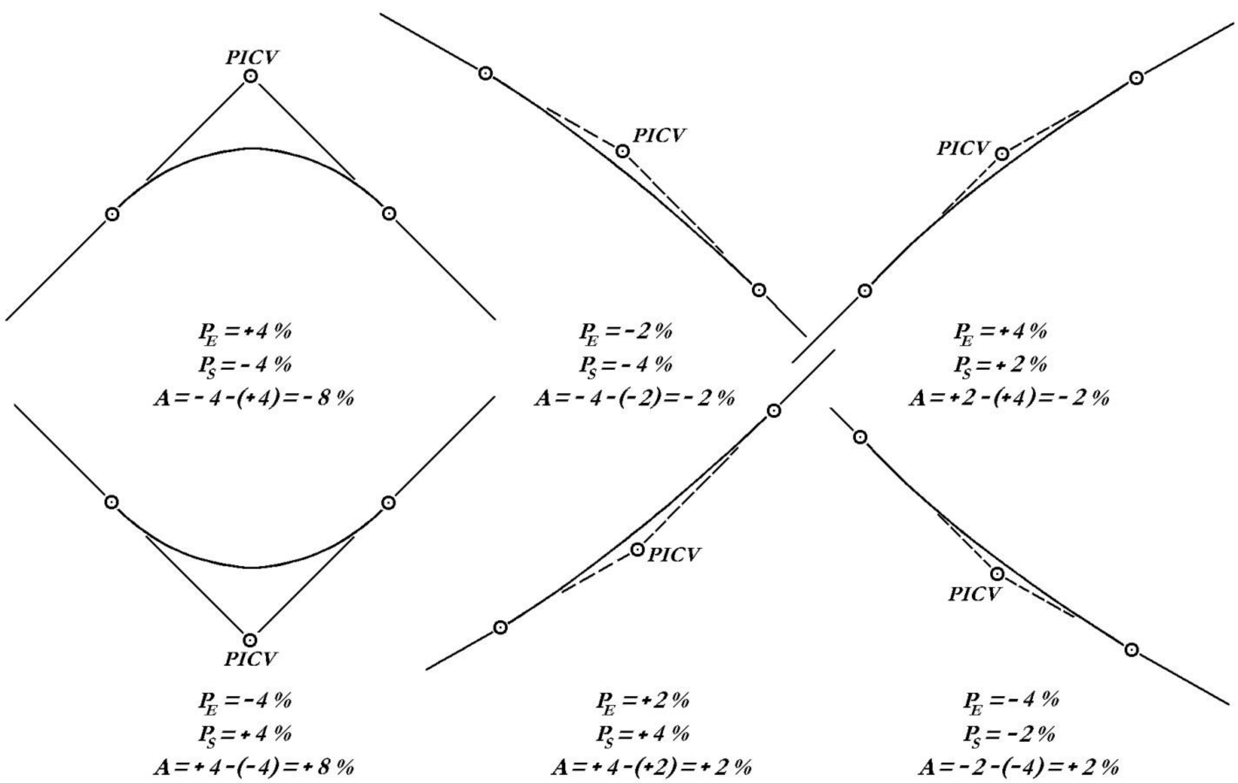


Figura 63 Casos posibles de curvatura convexa y cóncava en Acuerdos Verticales. A. diferencia algebraica de pendientes.

La fórmula para el cálculo de cotas deviene entonces en:

$$Y_{PSC} = Y_O + \frac{P_E}{100} X_{PSC} - d_{PSC}$$

Ejemplo:

P_E = + 3 %

P_S = – 4 %

Y_O = 500,255 m

L_{CV} = 200 m

Se pide: Cota del PSC situado a 50 m del punto $TCCV$.

Solución:

$A = P_S - P_E = -4 - (+3) = -4 - 3 = -7$ % (Acuerdo convexo)

$$d_{PSC} = -\frac{A}{200 \cdot L_{CV}} (X_{PSC})^2 = -\frac{-7}{200(200)} 50^2 = 0,438\, m$$

$$Y_{(50\, m)} = 500,255 + \frac{3}{100} 50 - 0,438 = 501,317\, m$$

Ejemplo:

Con los datos del caso anterior determine la cota del punto $CTCV$.

Solución:

$$d = -\frac{A}{200 \cdot L_{CV}} X^2 = \frac{-7}{200(200)} 200^2 = 7,000\, m$$

$$Y_{CTCV} = 500,255 + \frac{3}{100} 200 - 7 = 499,255\, m$$

también:

$$Y_{CTCV} = Y_{PICV} + \frac{P_S}{100} \frac{L_{CV}}{2}$$

$$Y_{PICV} = Y_O + \frac{P_E}{100} \frac{L_{CV}}{2} = 500.255 + \frac{3}{100} \frac{(200)}{2} = 503,255\, m$$

$$Y_{CTCV} = 503,255 + \frac{(-4)}{100}\, 100 = 499,255\, m \quad ok$$

El desvío sobre la tangente, cuando éste se localiza en la vertical del $PICV$ es igual a la Externa. Su fórmula se obtiene haciendo X_{PSC} igual a $L_{CV}/2$:

$$E = -\frac{A}{200 \cdot L_{CV}} \left(\frac{L_{CV}}{2}\right)^2 = -\frac{A}{200} \frac{L_{CV}}{4} = -\frac{A \cdot L_{CV}}{800}$$

Ejemplo:

Con los datos de los ejemplos anteriores determine el valor de $\boldsymbol{E}$.

Solución:

$$E = -\frac{A \cdot L_{CV}}{800} = -\frac{-7(200)}{800} = 1,750\ m$$

En un acuerdo vertical cóncavo, por ser la Externa un desvío particular, adoptará signo negativo.

Ejemplo:

P_E = – 4 %

P_S = + 2 %

L_{CV} = 115 m

E = **?**

Solución:

$$A = P_S - P_E = +2 - (-4) = +2 + 4 = +6\ \%$$

$$E = -\frac{A \cdot L_{CV}}{800} = -\frac{6\ (115)}{800} = -0,863\ m$$

La pendiente en un $\boldsymbol{PSC}$ se obtiene evaluando la primera derivada de la ecuación general:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_E}{100} + \frac{P_S - P_E}{100 \cdot L_{CV}} X_{PSC} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} 100 = P_E + \frac{P_S - P_E}{L_{CV}} X_{PSC}$$

Ejemplo:

Con los datos del ejemplo anterior determine la pendiente en el punto singular $\boldsymbol{CCV}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_E}{100} + \frac{P_S - P_E}{100 \cdot L_{CV}} X_{PSC} = \frac{-4}{100} + \frac{6}{100(115)} = -0,04 + 0,03 = -0,01$$

La pendiente porcentual es entonces:

$$\frac{dy}{dx} 100 = -0,01(100) = -1\ \%$$

Este valor es igual a la semisuma (suma promedio) de las pendientes de entrada y salida:

$$P_{CCV} = \frac{P_E + P_S}{2} = \frac{-4\ +\ 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1\ \%$$

El ápice de la curva se localizará en el punto de inflexión de la parábola. Entonces, anulando la ecuación de la pendiente se obtiene la distancia $X_{ápice}$, referida al punto $\boldsymbol{TCCV}$ a la que se encuentra ese punto culminante.

Ejemplo:

$\boldsymbol{P_E}$ = + 2 %

$\boldsymbol{P_S}$ = – 2 %

$\boldsymbol{Y_O}$ = 222,222 m

$\boldsymbol{L_{CV}}$ = 222 m

$\boldsymbol{X}_{\text{á}\boldsymbol{pice}}$ = ?

$\boldsymbol{Y}_{\text{á}\boldsymbol{pice}}$ = ?

Solución:

$\boldsymbol{A = P_S - P_E = -2 - (+2) = -2 - 2 = -4}$ % (Curva convexa)

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{P_E}{100} + \frac{(P_S - P_E)}{100 \cdot L_{CV}} X_{\text{ápice}} = 0}$$

$$\boldsymbol{X_{\text{ápice}} = -\frac{P_E \cdot L_{CV}}{P_S - P_E} = -\frac{P_E \cdot L_{CV}}{A} = -\frac{2(222)}{-4} = 111,00\ m}$$

$$\boldsymbol{Y_{\text{ápice}} = Y_0 + \frac{P_E}{100}\left(X_{\text{ápice}}\right) + \frac{A}{200 \cdot L_{CV}} \left(X_{\text{ápice}}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{Y_{\text{ápice}} = 222,222 + \frac{2}{100}(111) + \frac{-4}{200 \cdot 222}(111)^2 = 223,332\ m}$$

Si en la ecuación general de la Cota de un $\boldsymbol{PSC}$ en la parábola, sustituimos a $\boldsymbol{X}$ por su valor particular en el ápice, se tiene:

$$\boldsymbol{Y_{\text{ápice}} = Y_O + \frac{P_E}{100}\left(-\frac{P_E \cdot L_{CV}}{A}\right) + \frac{A}{200 \cdot L_{CV}}\left(-\frac{P_E \cdot L_{CV}}{A}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{Y_{\text{ápice}} = Y_O - \frac{(P_E)^2 \cdot L_{CV}}{100 \cdot A} + \frac{(P_E)^2 \cdot L_{CV}}{200 \cdot A} = Y_O - \frac{(P_E)^2 \cdot L_{CV}}{200 \cdot A}}$$

Evaluando:

$$\boldsymbol{Y_{\text{ápice}} = 222,222 - \frac{2^2(222)}{200\,(-4)} = 223,332\ m \quad ok}$$

Ejemplo:

$\boldsymbol{P_E}$ = – 4 %

$\boldsymbol{P_S}$ = + 2 %

$\boldsymbol{L_{CV}}$ = 150 m

$\Delta\boldsymbol{h}_{(\boldsymbol{TCCV}-\text{á}\boldsymbol{pice})}$ = ?

Solución:

$$\boldsymbol{A = +2-(-4) = +2+4 = +6}\ \%\ \text{(curva convexa)}$$

$$\boldsymbol{X}_{\text{á}\boldsymbol{pice}} = -\frac{\boldsymbol{P_E \cdot L_{CV}}}{\boldsymbol{A}} = -\frac{\boldsymbol{(-4)150}}{\boldsymbol{6}} = \boldsymbol{100\ m}$$

$$\Delta\boldsymbol{h}_{(\boldsymbol{TCCV}-\text{á}\boldsymbol{pice})} = \frac{\boldsymbol{P_E}}{\boldsymbol{100}}\ \boldsymbol{X}_{\text{á}\boldsymbol{pice}} + \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{200\ L_{CV}}}\ (\boldsymbol{X}_{\text{á}\boldsymbol{pice}})^{\boldsymbol{2}}$$

$$\Delta\boldsymbol{h}_{(\boldsymbol{TCCV}-\text{á}\boldsymbol{pice})} = -\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{100}}\boldsymbol{100} + \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{200 \cdot 150}}\ (\boldsymbol{100})^{\boldsymbol{2}}$$

$$\Delta\boldsymbol{h}_{(\boldsymbol{TCCV}-\text{á}\boldsymbol{pice})} = \boldsymbol{-4+2 = -2{,}000\ m}$$

Obsérvese que $\Delta\boldsymbol{h}$ puede ser positivo o negativo y en el presente caso el signo indica que el ápice se encuentra por debajo del punto $\boldsymbol{TCCV}$.

La unión de un $\boldsymbol{PSC}$ con el punto $\boldsymbol{TCCV}$ por medio de una recta, forma una cuerda cuya tangente es:

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{PSC})}\% = \frac{\Delta\boldsymbol{y}}{\Delta\boldsymbol{x}}\boldsymbol{100} = \frac{\boldsymbol{Y_{PSC} - Y_O}}{(\boldsymbol{Prog.PSC - Prog.TCCV})}\boldsymbol{100} = \frac{\boldsymbol{Y_{PSC} - Y_O}}{\boldsymbol{X_{PSC}}}\boldsymbol{100}$$

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{PSC})} = \frac{\boldsymbol{Y_O} + \frac{\boldsymbol{P_E}}{\boldsymbol{100}}\boldsymbol{X_{PSC}} + \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{200\ L_{CV}}}(\boldsymbol{X_{PSC}})^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{Y_O}}{\boldsymbol{X_{PSC}}} \cdot \boldsymbol{100}$$

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{PSC})} = \frac{\boldsymbol{P_E \cdot X_{PSC}} + \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{2 \cdot L_{CV}}}\ (\boldsymbol{X_{PSC}})^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{X_{PSC}}} = \boldsymbol{P_E} + \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{2 \cdot L_{CV}}} \cdot \boldsymbol{X_{PSC}}$$

Ejemplo:

$\boldsymbol{P_E}$ = + 4 %

$\boldsymbol{P_S}$ = – 2 %

$\boldsymbol{L_{CV}}$ = 160 m

$\boldsymbol{X_{PSC}}$ = 80 m

$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{PSC})}$ = ?

Solución:

$$\boldsymbol{A = P_S - P_E = -2-(+4) = -2-4 = -6}\ \%\ \text{(Curva convexa)}$$

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{PSC})}\% = \boldsymbol{P_E} + \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{2 \cdot L_{CV}}} \cdot \boldsymbol{X_{PSC}} = \boldsymbol{4} + \frac{\boldsymbol{-6}}{\boldsymbol{2 \cdot 160}}\boldsymbol{80} = \boldsymbol{2{,}5}\ \%$$

Por analogía con la fórmula de la cuerda del punto $\boldsymbol{CCV}$ podemos escribir:

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{PSC})}\% = \boldsymbol{P_E} + \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{2 \cdot L_{CV}}}\ \boldsymbol{X_{PSC}} = \frac{\boldsymbol{P_E + P_{PSC}}}{\boldsymbol{2}}$$

Donde $\boldsymbol{P_{PSC}}$ es la pendiente porcentual de un punto genérico. Podemos entonces concluir que: la pendiente de una cuerda es igual a la semisuma de las pendientes en los extremos del arco que subtiende. Así, la pendiente de la Cuerda Larga es:

$$\boldsymbol{P_{CL} = \frac{P_E + P_S}{2} = P_{CCV}}$$

Ejemplo:

Con los datos del problema anterior determine $\boldsymbol{P_{CL}}$ y $\boldsymbol{P_{CCV}}$.

Solución:

$$\boldsymbol{P_{CL} = \frac{+4 + (-2)}{2} = \frac{+4 - 2}{2} = \frac{+2}{2} = 1{,}0}\ \%$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} 100 = P_{CCV}}\ \% = \boldsymbol{\left(\frac{P_E}{100} + \frac{A}{100 \cdot L_{CV}} X_{PSC}\right) 100}$$

$$\boldsymbol{P_{CCV}}\ \% = \boldsymbol{\left(\frac{4}{100} + \frac{-6}{100\ (160)}\ 80\right)\ 100 = 1{,}0}\ \% \quad \boldsymbol{ok}$$

La flecha, distancia vertical entre el punto $\boldsymbol{CCV}$ y el punto medio de la Cuerda Larga, se obtiene diferenciando la cota de dichos puntos; este segmento de recta vertical, al igual que la externa, está contenido en la vertical del $\boldsymbol{PICV}$:

$$\boldsymbol{flecha = f = Y_{CCV} - \left\{Y_O + \frac{(P_E + P_S)}{200}\ \frac{L_{CV}}{2}\right\}}$$

$$\boldsymbol{f = Y_O + \frac{P_E}{100}\left(\frac{L_{CV}}{2}\right) + \frac{A}{200\, L_{CV}}\left(\frac{L_{CV}}{2}\right)^2 - Y_O - \frac{(P_E + P_S)}{200}\ \frac{L_{CV}}{2}}$$

$$\boldsymbol{f = \frac{P_E\, L_{CV}}{200} + \frac{A\, L_{CV}}{800} - \frac{(P_E + P_S)\, L_{CV}}{400}}$$

$$\mathrm{f} = \boldsymbol{\frac{4\, P_E\, L_{CV} + A\, L_{CV} - 2\, L_{CV}(P_E + P_S)}{800}}$$

$$\boldsymbol{f = \frac{L_{CV}}{800}(4\, P_E + A - 2\, P_E - 2\, P_S)}$$

$$\boldsymbol{f = \frac{L_{CV}}{800}(2\, P_E - 2\, P_S) + A = \frac{L_{CV}}{800}(2(P_E - P_S) + A)}$$

pero: $\boldsymbol{P_E - P_S = -A}$ y entonces:

$$\boldsymbol{f = \frac{L_{CV}}{800}(\ 2\ (-A) + A) = \frac{L_{CV}}{800}(-2\, A + A) = \frac{L_{CV}}{800}(-A)}$$

$$\boldsymbol{f = -\frac{L_{CV}}{800}\ A = Externa = E}$$

En efecto:

$$f = -\frac{\mathbf{150\ (-6)}}{\mathbf{800}} = \mathbf{1,125\ m} = \boldsymbol{Externa}$$

Vemos como la flecha y la externa tienen igual signo y valor, dependiendo el signo de sentido de la curvatura del enlace. Resolviendo el siguiente problema se emplearán las formulas deducidas hasta el momento:

Ejemplo:

Enlace con una curva vertical de 150 metros de longitud las tangentes definidas por los datos geométricos. Determine asimismo:

1) Cota y Progresiva de los puntos $\boldsymbol{TCCV}$ y $\boldsymbol{CTCV}$.

2) Cota y Progresiva de los $\boldsymbol{PSC}$ cuya pendiente es – 1 % y + 1 %.

3) Cota y Progresiva del ápice.

4) Externa

5) Cota del $\boldsymbol{CCV}$

6) Pendiente de la Cuerda Larga.

Datos:

Cota	Punto	Progresiva
569,704	$\boldsymbol{PICV_{11}}$	11 + 230,15
564,577	$\boldsymbol{PICV_{12}}$	11 + 435,23
574,720	$\boldsymbol{PICV_{13}}$	11 + 725,03

Solución:

$$\boldsymbol{P_E} = \frac{\boldsymbol{\Delta Y}}{\boldsymbol{\Delta X}}\mathbf{100} = \frac{\mathbf{564,577 - 569,704}}{\mathbf{(11 + 435,23) - (11 + 230,15)}}\mathbf{100} = \mathbf{-\ 2,5}\ \%$$

$$\boldsymbol{P_S} = \frac{\boldsymbol{\Delta Y}}{\boldsymbol{\Delta X}}\mathbf{100} = \frac{\mathbf{574,720 - 564,577}}{\mathbf{(11 + 725,03) - (11 + 435,23)}}\mathbf{100} = \mathbf{+\ 3,5}\ \%$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P_S} - \boldsymbol{P_E} = \mathbf{+\ 3,5 - (-2,5) = +\ 3,5 + 2,5 = +\ 6,0}\ \%\ \text{(CV cóncava)}$$

1a) Cota del punto $\boldsymbol{TCCV_{12}}$:

$$\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{TCCV}\ \mathbf{12}} = \boldsymbol{Y_O} = \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{PICV}\ \mathbf{12}} - \frac{\boldsymbol{P_E}}{\mathbf{100}}\left(\frac{\boldsymbol{L_{CV}}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{564,577} - \frac{\mathbf{(-2,5)}}{\mathbf{100}}\mathbf{75} = \mathbf{566,452\ m}$$

1b) Progresiva del punto $\boldsymbol{TCCV_{12}}$:

$$\boldsymbol{Prog.\ TCCV_{12}} = \boldsymbol{Prog.PICV_{12}} - \frac{\boldsymbol{L_{CV}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{(11 + 435,23) - 75 = (11 + 360,23)}$$

1c) Cota del punto $\boldsymbol{CTCV_{12}}$:

$$\boldsymbol{Y_{\;CTCV\;12} = Y_{\;PICV\;12} + \frac{P_E}{100}\left(\frac{L_{CV}}{2}\right) = 564,577 + \frac{3,5}{100}75 = 567,202\;m}$$

1d) Progresiva del punto $\boldsymbol{CTCV_{12}}$:

$$\boldsymbol{Prog.\;CTCV_{12} = Prog.PICV_{12} + \frac{L_{CV}}{2} = (11+435,23) + 75 = (11+510,23)}$$

2a) Progresiva del $\boldsymbol{PSC}$ cuya pendiente es –1 %:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}100 = -1 = P_E + \frac{A}{L_{CV}}\;X_{PSC(-1\%)} = -2,5 + \frac{6}{150}\;X_{PSC(-1\%)}}$$

$$\boldsymbol{X_{PSC(-1\%)} = \frac{(-1+2,5)}{0,04} = 37,50\;m}$$

Progresiva del $\boldsymbol{PSC_{(-1\%)}}$:

$$\boldsymbol{Prog.PSC_{(-1\;\%)} = Prog.TCCV_{12} + 37,50}$$

$$\boldsymbol{Prog.PSC_{(-1\;\%)} = (11+360,23) + 37,50 = (11+\;397,73)}$$

2b) Cota del $\boldsymbol{PSC}$ cuya pendiente es –1 %:

$$\boldsymbol{Y_{PSC(-1\%)} = Y_O + \frac{P_E}{100}\;X_{PSC(-1\;\%)} + \frac{A}{200\;L_{CV}}\;{X_{PSC(-1\;\%)}}^2}$$

$$\boldsymbol{Y_{PSC(-1\%)} = 566,452 + \frac{(-2,5)}{100}\;37,50 + \frac{6}{200(150)}\;37,50^2}$$

$$\boldsymbol{Y_{PSC(-1\%)} = 565,796\;m}$$

2c) Progresiva del $\boldsymbol{PSC}$ cuya pendiente es + 1 %:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}100 = 1 = P_E + \frac{A}{L_{CV}}\;X_{PSC(1\%)} = -2,5 + \frac{6}{150}\;X_{PSC(1\%)}}$$

$$\boldsymbol{X_{PSC(1\%)} = \frac{(1+2,5)}{0,04} = 87,50\;m}$$

Progresiva del $\boldsymbol{PSC_{(1\%)}}$:

$$\boldsymbol{Prog.PSC_{(1\;\%)} = Prog.TCCV_{12} + 87,50}$$

$$\boldsymbol{Prog.PSC_{(1\;\%)} = (11+360,23) + 87,50 = (11+\;447,73)}$$

2d) Cota del $\boldsymbol{PSC}$ cuya pendiente es + 1 %:

$$\boldsymbol{Y_{PSC(1\%)} = Y_O + \frac{P_E}{100}\;X_{PSC(1\;\%)} + \frac{A}{200\;L_{CV}}\;{X_{PSC(1\;\%)}}^2}$$

$$\boldsymbol{Y_{PSC(1\%)} = 566,452 + \frac{(-2,5)}{100}\;87,50 + \frac{6}{200(150)}\;87,50^2 = 565,796\;m}$$

Como se observa las cotas de ambos puntos son iguales por ser sus pendientes de igual valor y de signo contrario. Esta situación geométrica tiene lugar cuando los puntos se localizan a igual distancia del eje de simetría de la parábola.

3a) Progresiva del ápice (este punto singular del enlace, cuando lo contiene, se evidencia por el cambio de signo de las pendientes de entrada y salida)

$$\boldsymbol{X}_{\text{ápice}} = -\frac{\boldsymbol{P_E \cdot L_{CV}}}{\boldsymbol{A}} = -\frac{\mathbf{(-2,5) \cdot 150}}{\mathbf{6}} = \mathbf{62,50}\ \boldsymbol{m}$$

Nota: este valor también puede obtenerse calculando la semisuma de las distancias desde el punto $\boldsymbol{TCCV}$ a puntos de la parábola con pendiente de igual valor y distinto signo. Empleando los $\boldsymbol{PSC}$ anteriormente evaluados en este ejemplo se tiene:

$$\boldsymbol{X}_{\text{ápice}} = \frac{\boldsymbol{X_{PSC(-1\%)} + X_{PSC(+1\%)}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{37,50 + 87,50}}{\mathbf{2}} = \mathbf{62,50}\ \boldsymbol{m} \quad \boldsymbol{ok}$$

La Progresiva entonces será:

$$\boldsymbol{Prog.}\ \text{á}\boldsymbol{pice} = \boldsymbol{Prog.TCCV_{12}} + \mathbf{62,50} = (\mathbf{11 + 422,73})$$

3b) Cota del ápice:

$$\boldsymbol{Y}_{\text{ápice}} = \boldsymbol{Y_O} - \frac{\boldsymbol{(P_E)^2 \cdot L_{CV}}}{\mathbf{200} \cdot \boldsymbol{A}}$$

$$\boldsymbol{Y}_{\text{ápice}} = \mathbf{566,452} - \frac{\mathbf{(-2,5)^2 \cdot 150}}{\mathbf{200\ (6)}} = \mathbf{565,671}\ \boldsymbol{m}$$

4) Externa:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{A \cdot L_{CV}}}{\mathbf{800}} = -\frac{\mathbf{6\ (150)}}{\mathbf{800}} = \mathbf{-1,125}\ \boldsymbol{m}$$

5) Cota del $\boldsymbol{CCV_{12}}$

$$\boldsymbol{Y_{CCV_{12}}} = \boldsymbol{Y_O} + \frac{\boldsymbol{P_E}}{\mathbf{100}}\left(\frac{\boldsymbol{L_{CV}}}{\mathbf{2}}\right) + \frac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{200} \cdot \boldsymbol{L_{CV}}}\left(\frac{\boldsymbol{L_{CV}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{Y_{CCV_{12}}} = \mathbf{566,452} + \frac{\mathbf{(-2,5)}}{\mathbf{100}}\left(\frac{\mathbf{150}}{\mathbf{2}}\right) + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{200\ (150)}}\left(\frac{\mathbf{150}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{565,702}\ \boldsymbol{m}$$

4a) Externa (comprobación):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Y_{PICV_{12}}} - \boldsymbol{Y_{CCV_{12}}} = \mathbf{564,577 - 565,702} = \mathbf{-1,125}\ \boldsymbol{m} \quad \boldsymbol{ok}$$

6) Pendiente de la Cuerda Larga:

$$\boldsymbol{P_{CL}} = \left(\frac{\boldsymbol{Y_{CTCV_{12}} - Y_{TCCV_{12}}}}{\boldsymbol{L_{CV}}}\right)\mathbf{100} = \left(\frac{\mathbf{567,202 - 566,452}}{\mathbf{150}}\right)\mathbf{100} = \mathbf{0,5}\ \%$$

también:

$$\boldsymbol{P_{CL}} = \frac{\boldsymbol{P_E + P_S}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{(-2,5 + 3,5)}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0,5}\ \%$$

CURVATURA DE LA PARÁBOLA DE ENLACE

Si con los datos del ejemplo anterior determináramos la variación de pendiente en los extremos de de distintos arcos de parábola simplemente estaríamos comprobando la característica fundamental de la curva: su rata constante de variación de pendiente por unidad de longitud. En efecto:

$$\frac{\boldsymbol{P_S - P_E}}{\boldsymbol{L_{CV}}} = \frac{\mathbf{+3,5-(-2,5)}}{\mathbf{150}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{150}} = \mathbf{0,04}\ \%/\boldsymbol{m}$$

de la misma forma:

$$\frac{\boldsymbol{P_{CCV} - P_E}}{\frac{\boldsymbol{L_{CV}}}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{+0,5-(-2,5)}}{\frac{\mathbf{150}}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{0,5+2,5}}{\mathbf{75}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{75}} = \mathbf{0,04}\ \%/\boldsymbol{m}$$

y también:

$$\frac{\boldsymbol{P_S - P}_{\text{á}\boldsymbol{pice}}}{\boldsymbol{L_{CV} - X}_{\text{á}\boldsymbol{pice}}} = \frac{\mathbf{+3,5-0}}{\mathbf{150-62,50}} = \frac{\mathbf{3,5}}{\mathbf{87,50}} = \mathbf{0,04}\ \%/\boldsymbol{m}$$

De aquí que, generalizando, puede escribirse:

$$\frac{\boldsymbol{P_S - P_E}}{\boldsymbol{L_{CV}}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{L_{CV}}} = \boldsymbol{constante} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K_V}}$$

Y entonces:

$$\boldsymbol{L_{CV} = A \cdot K_V}$$

La constante $\boldsymbol{K_V}$, propia de cada parábola, es una expresión de su curvatura y representa la longitud de curva necesaria (medida en proyección horizontal) para que se produzca una variación uniporcentual de pendiente. Correlativamente, el reciproco de $\boldsymbol{K_V}$ equivale a la variación de pendiente que tiene lugar en cada metro proyectado de desarrollo de curva.

La práctica usual de diseño de curvas verticales en Venezuela acoge la pendiente en su forma porcentual, que es la utilizada comúnmente en EUA. Las normas viales de muchos países europeos emplean la forma decimal por lo que el Kv, que resulta cien veces mayor que el determinado con pendiente porcentual, tiene también una significación geométrica: es el radio de curvatura del círculo osculador en las inmediaciones del ápice de la parábola. Esta expresión de la curvatura —según criterio de algunos proyectistas— permite tener una noción relativa de la razón de cambio de pendiente de la curva facilitándose el diseño geométrico. Sin embargo, a pesar de que no es posible establecer terminantemente que el uso de la forma decimal es más conveniente que la porcentual, sí interesa destacar que el Kv de las N.V.V. a pesar de ser cien veces menor que aquel calculado con pendientes decimales, es una expresión equivalente.

El conocimiento del Kv, denominado de ordinario *parámetro de la curva vertical* y más rigurosamente *coeficiente angular*, es un elemento geométrico valioso que permite la simplificación de algunas de las fórmulas hasta ahora deducidas; veamos:

$$d_{PSC} = -\frac{A}{200 \cdot L_{CV}} (X_{PSC})^2$$

pero

$$\frac{A}{L_{CV}} = \frac{1}{K_V}$$

por lo que la expresión anterior se modifica a:

$$d_{PSC} = -\frac{(X_{PSC})^2}{200 \cdot K_V}$$

otras fórmulas también se modifican:

$$Y_{PSC} = Y_O + \frac{P_E}{100} X_{PSC} + \frac{A}{200 \cdot L_{CV}} (X_{PSC})^2 = Y_O + \frac{P_E}{100} X_{PSC} + \frac{(X_{PSC})^2}{200 \cdot K_V}$$

$$E = -\frac{A \cdot L_{CV}}{800} = -\frac{L_{CV}}{K_V} \frac{L_{CV}}{800} = -\frac{(L_{CV})^2}{800 \cdot K_V}$$

$$P_{PSC} = P_E + \frac{A}{L_{CV}} X_{PSC} = P_E + \frac{X_{PSC}}{K_V}$$

$$X_{\text{ápice}} = -\frac{P_E \cdot L_{CV}}{A} = -P_E \cdot K_V$$

$$Y_{\text{ápice}} = Y_O - \frac{(P_E)^2 \cdot L_{CV}}{200 \cdot A} = Y_O - \frac{(P_E)^2 \cdot K_V}{200}$$

Ejemplo:

$P_E = -3,5\ \%$ $\qquad$ $P_S = +2,5\ \%$

$K_V = 15\ m/\%$

Se pide:

1) $L_{CV} = ?$

2) $E = ?$

3) $X_{\text{ápice}} = ?$

4) $\Delta h_{TCCV-\text{ápice}} = ?$

5) $P_{CCV} = ?$

Solución:

$$A = P_S - P_E = +2,5 - (-3,5) = 2,5 + 3,5 = 6\ \%$$

1) $L_{CV} = K_V \cdot A = 15 \cdot 6 = 90\ m$

2) $E = -\frac{(L_{CV})^2}{800 \cdot K_V} = -\frac{(90)^2}{800\ (15)} = -0,675\ m$

3) $X_{\text{ápice}} = -P_E \cdot K_V = -(-3,5)(15) = 52,50\ m$

4) $\Delta h_{TCCV-\text{ápice}} = Y_O - Y_{\text{ápice}}$

$$\Delta h_{TCCV-\text{ápice}} = -\frac{(P_E)^2 \cdot K_V}{200} = -\frac{(-3,5)^2\ (15)}{200} = 0,919\ m$$

5) $P_{CCV} = P_E + \frac{X}{K_V} = P_E + \frac{L_{CV}}{2 \cdot K_V}$

$$P_{CCV} = -3,5 + \frac{90}{2(15)} = -0,5\ \%$$

también:

5) $P_{CCV} = \frac{P_E + P_S}{2} = \frac{-3,5+2,5}{2} = 0,5\ \%\quad ok$

DISEÑO DE LAS CURVAS VERTICALES

Los criterios de diseño son, en orden de importancia, seguridad, drenaje y apariencia. En oportunidades, el efecto sinérgico de dos o más de estos aspectos genera resultados de conjunto muy complejos y difíciles de prever por lo que se debe tratar, en la medida de los posible, de diseñar con longitudes de curva —que es el aspecto fundamental— superiores a las mínimas.

Criterio de Seguridad

Si en una curva vertical el tramo de carretera que el conductor puede observar delante es superior a la distancia que requiere para, luego de divisado un obstáculo en la calzada, reaccionar y detener el vehículo, se dice que la curva es segura. De la misma manera puede la curva considerarse segura si la distancia visible adelante permite, sin riesgo de una eventual colisión frontal, el adelantamiento de los vehículos lentos.

Los conceptos *Distancia de Visibilidad de Frenado*, DVF y *Distancia de Visibilidad de Paso*, DVP, combinan tanto aspectos atinentes al propio conductor: edad, reflejos, estado emotivo, como al vehículo: estado de los frenos y neumáticos, potencia, y aun al obstáculo que motiva la detención: tamaño, color, forma. En síntesis, la complejidad del estudio supera los alcances del presente curso[17] por lo que nos limitaremos a

[17] *Para un estudio detallado de estos conceptos véase “Carreteras. Estudio y Proyecto” de Jacob Carciente y “El diseño geométrico de Carreters”, Tomo I, de Pedro J. Andueza.*

reportar en la tabla siguiente los valores de DVF que, de acuerdo a la ***AASHTO*** y a las ***N.V.V.*** se asignan a las velocidades normalizadas.

V_p *(Km/h)*	d_r *(m)*	d_f *(m)*	DVF *(m) AASHTO*	DVF *(m) N.V.V.*
40	28	17	45	50
50	35	28	63	60
60	42	43	85	75
70	49	62	111	90
80	56	84	140	110
90	63	107	170	130
100	69	136	205	155
110	76	168	244	180
120	83	210	293	210

Tabla 19 Distancia de Visibilidad de Frenado (DVF); dr: distancia de reacción df: distancia de frenado.

Los valores de ***DVF*** de la ***N.V.V.*** resultan menores si se les compara con sus homólogos de la ***AASHTO***, por lo que el uso de valores superiores redundará en beneficio de la seguridad. Las ***DVF*** arriba reportadas corresponden a detenciones en calzada horizontal por lo que convendría aplicar, para rasantes con otra inclinación, la formula siguiente:

$$DVF = d_R + d_f = \frac{V_p}{3,6}\, t + \frac{(V_p)^2}{254\,(f_L \pm i)}$$

donde:

V_p : Velocidad de proyecto

t : Tiempo de percepción y reacción (2,5 seg.)

f_L : Factor de fricción longitudinal

i : Inclinación decimal de la rasante

La inclinación de la rasante se tomará negativa (–) si la pendiente es de bajada y positiva (+) si es de subida. A pesar de que las ***DVF*** de la ***N.V.V.*** son, para velocidades altas, insuficientes, la corrección no es empleada por muchos proyectistas y otros solamente la utilizan para el rango de pendientes + 2 % < $P_{rasante}$ < – 2 % tal vez suponiendo que al usar longitudes de curva vertical superiores a las mínimas, la corrección de la distancia resulta innecesaria.

Las distancias mínimas requeridas para el adelantamiento de vehículos lentos, ***DVP,*** son marcadamente superiores a las ***DVF*** y aquellas recomendadas por la ***N.V.V.*** se tabulan a continuación:

V_p *(Km/h)*	*DVP (m)*
40	270
50	340
60	420
70	490
80	550
90	610
100	670
110	750
120	830

Tabla 20 Valores mínimos de la Distancia de Visibilidad de Paso (DVP) de acuerdo a las Normas Viales Venezolanas.

En las curvas verticales, así como en los tramos de pendiente constante, se deben disponer estas distancias como garantía de la seguridad. Analicemos, para acuerdos convexos y cóncavos, el diseño que considera las distancias de visibilidad de frenado y paso.

ACUERDOS VERTICALES CONVEXOS DISEÑADOS BAJO EL CRITERIO DE SEGURIDAD

Caso 1: $\boldsymbol{S \leq L_{CV}}$

La figura de la página siguiente representa un acuerdo vertical simétrico convexo donde la visual del conductor, que es recta y tangente a la calzada en ***PSC***, alcanza la parte superior de un objeto de altura $\boldsymbol{h}$ que obstaculiza el libre tránsito. El ojo del conductor se ha supuesto situado a una altura $\boldsymbol{H}$ sobre la calzada y la distancia entre el objeto y el ojo del conductor $\boldsymbol{S}$, es inferior a la longitud del acuerdo vertical.

Siendo $\boldsymbol{H}$ un desvío sobre la tangente en el $\boldsymbol{PSC}$ se tiene:

$$\boldsymbol{H = -\frac{A\,(S_1)^2}{200\,L_{CV}} \qquad \therefore \qquad S_1 = \sqrt{\frac{200\,H\,L_{CV}}{-A}}}$$

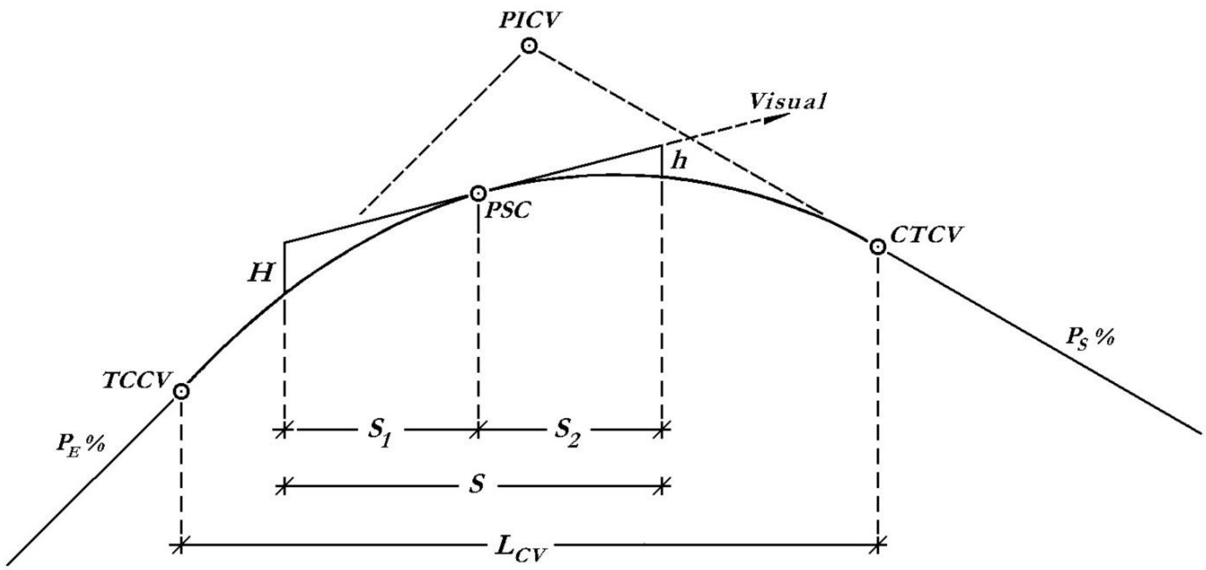


Figura 64 Acuerdo Vertical Simétrico Convexo. Caso S<Lcv.

De la misma manera:

$$\boldsymbol{h} = -\frac{\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{S_2})^2}{\boldsymbol{200\,L_{CV}}} \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{S_2} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{200\,h\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}}$$

Siendo $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$ se tiene:

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{200\,H\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}} + \sqrt{\frac{\boldsymbol{200\,h\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}}$$

Desarrollando el binomio al cuadrado obtenemos:

$$\boldsymbol{S^2} = \frac{\boldsymbol{200\,H\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}} + \boldsymbol{2}\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{200\,H\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{200\,h\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}}\right) + \frac{\boldsymbol{200\,h\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}$$

$$\boldsymbol{S^2} = \frac{\boldsymbol{200\,H\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}} + \frac{\boldsymbol{2\,(200)L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}\,\sqrt{\boldsymbol{H}}\,\sqrt{\boldsymbol{h}} + \frac{\boldsymbol{200\,h\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}$$

$$\boldsymbol{S^2} = \frac{\boldsymbol{200\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}\left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{H}}\,\sqrt{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{h}\right)$$

$$\boldsymbol{S^2} = \frac{\boldsymbol{200\,L_{CV}}}{\boldsymbol{-A}}\,\left(\sqrt{\boldsymbol{H}} + \sqrt{\boldsymbol{h}}\right)^2$$

Despejando $\boldsymbol{L_{CV}}$:

$$\boldsymbol{L_{CV}} = \frac{\boldsymbol{-A \cdot S^2}}{\boldsymbol{200}\left(\sqrt{\boldsymbol{H}} + \sqrt{\boldsymbol{h}}\right)^2}$$

Caso 2: $\boldsymbol{S \geq L_{CV}}$

En este análisis se supone que $\boldsymbol{S}$ supera la longitud del acuerdo vertical por lo que el planteamiento gráfico teórico es el de la figura a continuación:

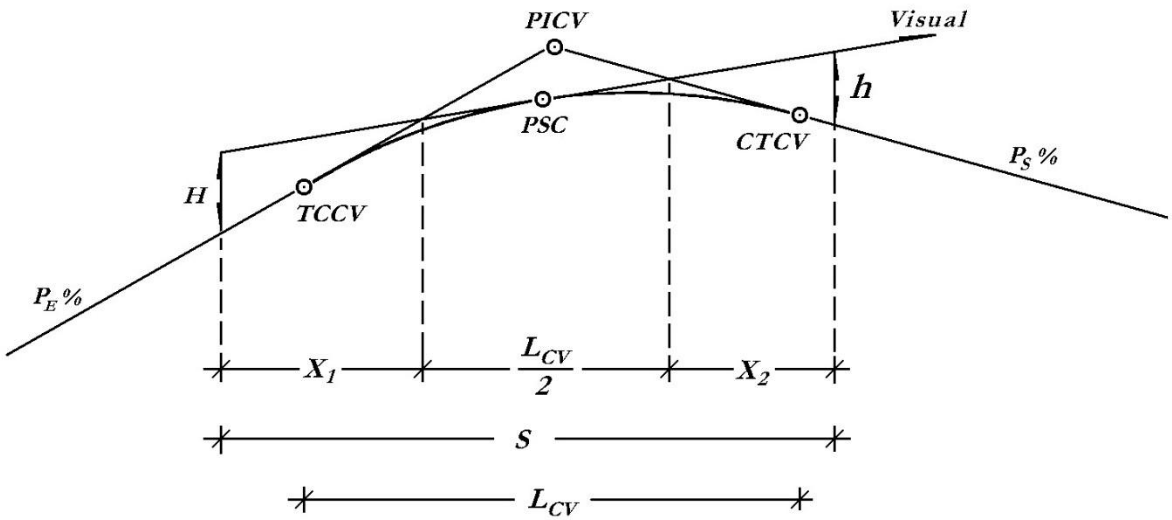


Figura 65 Acuerdo Vertical Simétrico Convexo- Caso S>Lcv.

Otra propiedad geométrica de la parábola determina que toda recta tangente a ella interseca a las rectas de entrada y salida sendos puntos $\boldsymbol{P_1}$ y $\boldsymbol{P_2}$, separados, invariablemente, por una distancia horizontal igual a $\boldsymbol{L_{CV}/2}$. Entonces:

$$\boldsymbol{H = \frac{P_E}{100}X_1 - \frac{P}{100}X_1}$$

$$\boldsymbol{H = \frac{X_1}{100}(P_E - P) \qquad \therefore \qquad X_1 = \frac{100\,H}{(P_E - P)}}$$

y también:

$$\boldsymbol{h = \frac{P}{100}X_2 + \frac{P_S}{100}X_2}$$

$$\boldsymbol{h = \frac{X_2}{100}(P + P_S) \qquad \therefore \qquad X_2 = \frac{100\,h}{(P + P_S)}}$$

igualmente vemos que:

$$\boldsymbol{S = X_1 + \frac{L_{CV}}{2} + X_2}$$

Sustituyendo se tiene:

$$\boldsymbol{S = X_1 = \frac{100\,H}{(P_E - P)} + \frac{L_{CV}}{2} + \frac{100\,h}{(P + P_S)}}$$

Para que $\boldsymbol{S}$ sea un mínimo debe cumplirse que $\frac{dS}{dP} = \mathbf{0}$; derivando entonces la expresión anterior encontramos el valor de $\boldsymbol{P}$ que alcanza este cometido:

$$\boldsymbol{\frac{dS}{dP} = 0 = \frac{100\,H}{(P_E - P)^2} + \frac{100\,h}{(P - P_S)^2}}$$

$$\boldsymbol{0 = \frac{100\,H}{(P_E - P)^2} - \frac{100\,h}{(P_S - P)^2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{100\,H}{(P_E - P)^2} = \frac{100\,h}{(P_S - P)^2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{H}{h} = \frac{(P_E - P)^2}{(P_S - P)^2} = \left(\frac{(P_E - P)}{(P_S - P)}\right)^2}$$

Tomando raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{h}} = \frac{P_E - P}{P_S - P}}$$

En el cociente del miembro derecho el numerador será positivo si el denominador no lo es. Análogamente, si el numerador es negativo el denominador no lo será. De aquí que el signo del miembro izquierdo que conduce a la solución es el negativo:

$$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{h}} = \frac{P_E - P}{P_S - P}}$$

Resolviendo y despejando $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P = \frac{P_E\sqrt{h} + P_S\sqrt{H}}{\sqrt{H} + \sqrt{h}}}$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación original y haciendo $\boldsymbol{P_E - P_S = -A}$, se despeja finalmente $\boldsymbol{L_{CV}}$:

$$\boldsymbol{L_{CV} = 2S + \frac{200\left(\sqrt{H} + \sqrt{h}\right)^2}{A}}$$

ACUERDOS VERTICALES CÓNCAVOS DISEÑADOS BAJO EL CRITERIO DE SEGURIDADAD.

En general el conductor tiene en los acuerdos verticales cóncavos visibilidad total del mismo durante las horas de luz. En este sentido, salvo por la apariencia, no existen limitaciones a la longitud de curva. No obstante, el manejo nocturno reduce considerablemente la visibilidad limitándola al alcance del haz de luces de los faros. Los fabricantes de vehículos, haciendo divergir el haz luminoso en aproximadamente 1° con respecto al eje longitudinal, garantizan que el alumbrado supere la distancia visible adelante $\boldsymbol{S}$. El análisis de diseño tiene en los acuerdos verticales cóncavos, como en las convexas, dos vertientes dependientes de la relación entre la distancia visible adelante y la longitud de curva.

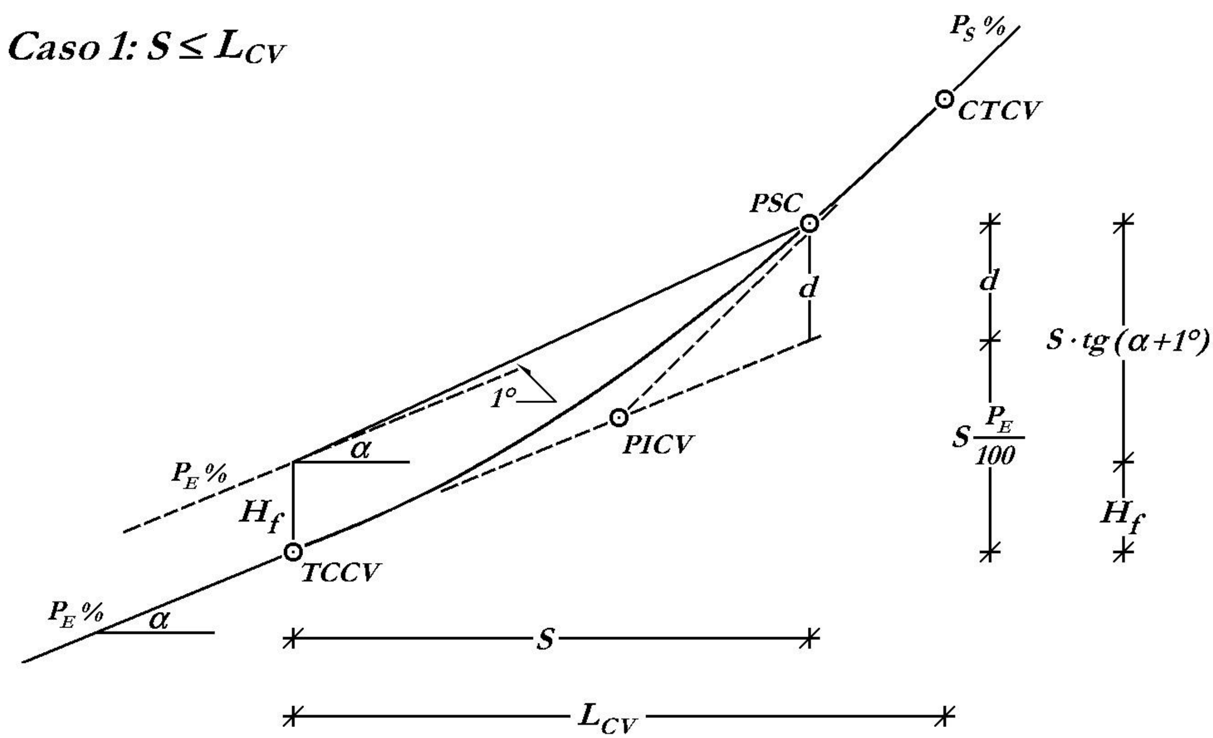


Figura 66 Acuerdo Vertical Simétrico Cóncavo. Caso S<Lcv; Hf: altura de los faros
$\boldsymbol{\alpha}$: ángulo vertical de la longitud recta de entrada.

En la figura anterior el desnivel entre el límite del haz de rayos y la prolongación de la recta de entrada es un desvío ($\boldsymbol{d}$) sobre la tangente. Se cumple entonces que:

$$\boldsymbol{H_f + S\ tg\ (\alpha + 1°) = S\ tg\ \alpha - d}$$

El signo menos del desvío de la expresión anterior obedece a que en las curvas cóncavas éste es negativo. También:

$$\boldsymbol{d = -\frac{A}{200\ L_{CV}}\ X^2 = -\frac{A}{200\ L_{CV}}\ S^2}$$

Sustituyendo:

$$H_f + S\, tg\,(\alpha + 1°) = S \cdot tg\,\alpha + \frac{A}{200\, L_{CV}}\, S^2$$

Podemos expresar el término $tg(\alpha + 1°)$ como:

$$tg(\alpha + 1°) = \frac{tg\,\alpha + tg\,1°}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,1°}$$

Siendo el producto $tg\,\alpha \cdot tg\,1°$ un sumando del denominador, α un ángulo normalmente restringido en las rasantes de carreteras y $tg\,1°$ un valor pequeño, no se comete error apreciable al suponer su valor como cero. Entonces:

$$tg(\alpha + 1°) = tg\,\alpha + tg\,1° = \frac{P_E}{100} + tg\,1°$$

Reemplazando:

$$H_f + S\left(\frac{P_E}{100} + tg\,1°\right) = S\frac{P_E}{100} + \frac{A}{200\,L_{CV}}S^2$$

$$H_f + S\,\frac{P_E}{100} + S\,tg\,1° = S\frac{P_E}{100} + \frac{A}{200\,L_{CV}}S^2$$

$$H_f + S\,tg\,1° = \frac{A}{200\,L_{CV}}S^2$$

Despejando L_{CV}:

$$L_{CV} = \frac{A \cdot S^2}{200\,(H_f + S \cdot tg\,1°)}$$

Caso 2: $S \geq L_{CV}$

En la Figura de la página siguiente se observa que:

$$S \cdot tg\,(\alpha + 1°) + H_f = \frac{P_S}{100}\left(S - \frac{L_{CV}}{2}\right) + \frac{P_E}{100}\left(\frac{L_{CV}}{2}\right)$$

desarrollando:

$$S \cdot tg\,(\alpha + 1°) + H_f = S\frac{P_S}{100} - \frac{P_S\,L_{CV}}{200} + \frac{P_E\,L_{CV}}{200}$$

Agrupando términos:

$$S \cdot tg\,(\alpha + 1°) + H_f = \frac{L_{CV}}{200}\,(P_E - P_S) + S\frac{P_S}{100}$$

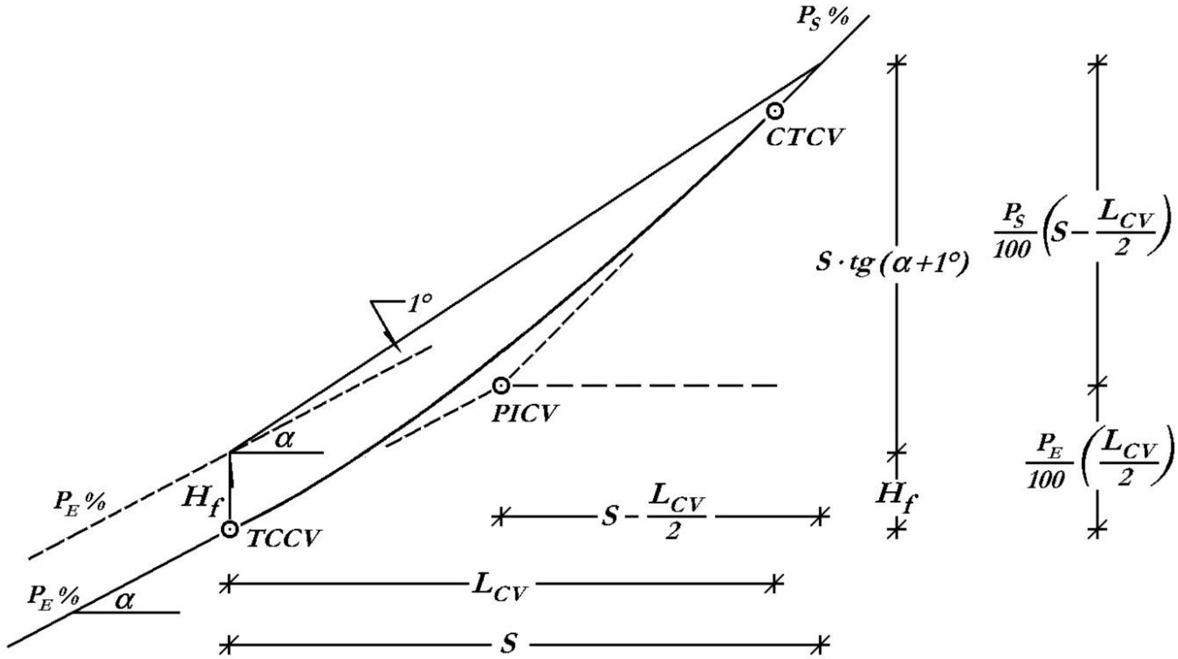


Figura 67 Acuerdo vertical Simétrico Cóncavo. Caso S>Lcv;
Hf: altura de los faros; α: ángulo vertical de la recta de entrada.

Análogamente al caso anterior:

$$tg(\alpha + 1°) = tg\ \alpha + tg\ 1° = \frac{P_E}{100} + tg\ 1°$$

Sustituyendo entonces:

$$S\left(\frac{P_E}{100} + tg\ 1°\right) + H_f = \frac{L_{CV}}{200}\ (P_E - P_S) + S\frac{P_E}{100}$$

Desarrollando y agrupando:

$$S \cdot tg\ 1° + H_f = \frac{L_{CV}}{200}(P_E - P_S) + \frac{S}{100}\ (P_S - P_E)$$

Pero: $P_E - P_S = -A$ y $P_S - P_E = A$, por lo que:

$$S \cdot tg\ 1° + H_f = -\frac{L_{CV}}{200}A + \frac{S}{100}A$$

$$S \cdot tg\ 1° + H_f = -\frac{A}{200}(L_{CV} - 2S)$$

Y finalmente:

$$L_{CV} = 2\ S - \frac{200(S \cdot tg\ 1° + H_f)}{A}$$

Para el cálculo de la longitud de los acuerdos verticales, tanto convexos como cóncavos, con base en la pauta de la ***N.V.V.***, se sustituye la longitud S por la distancia de Visibilidad de Frenado o la Distancia de Visibilidad de Paso, DVF y DVP, respectivamente, según se trate de diseñar bajo uno u otro criterio. Para facilitar los cálculos se sustituye L_{CV} por su equivalente $K_V \cdot A$ (véase desarrollo teórico en páginas 172 y siguientes) resultando las expresiones del K_V que a continuación se dan:

$$K_V = \frac{S^2}{200\,(\sqrt{H} + \sqrt{h})^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad Acuerdos\ Convexos\ (S \leq L_{CV})$$

$$K_V = \frac{2S}{A} + \frac{200\,(\sqrt{H} + \sqrt{h})^2}{A^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad Acuerdos\ Convexos\ (S \geq L_{CV})$$

$$K_V = \frac{S^2}{200\,(H_f + S \cdot tg\ 1°)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad Acuerdos\ Cóncavos\ (S \leq L_{CV})$$

$$K_V = \frac{2\,S}{A} - \frac{200\,(S \cdot tg\ 1° + H_f)}{A^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad Acuerdos\ Cóncavos\ (S \geq L_{CV})$$

Los valores de K_V, tanto en curvas convexas como en cóncavas, que se obtienen con las fórmulas para $S \leq L_{CV}$, son mayores que aquellos calculados para $S \geq L_{CV}$ y por ello habitualmente se diseña sin considerar el hecho de que S sea mayor o menor que L_{CV}. Las curvas resultan así más largas y en consecuencia más seguras compensando con creces el incremento en los costos de construcción. Si en las expresiones anteriores sustituimos los respectivos valores de H, h, H_f y H_V, que la Norma Vial Venezolana adopta, obtendremos el parámetro de diseño K_V para los casos que nos ocupan ($H = 1.15\ m$; $h = 0,15\ m$; $H_{faro} = 0,60\ m$; $H_V = 1,37\ m$).

Acuerdos Convexos con $S = DVF$

$$K_V = \frac{(DVF)^2}{200\,\left(\sqrt{1,15} + \sqrt{0,15}\right)^2} = \frac{(DVF)^2}{426}\ ; \qquad K_{V\,(NVV)} = \frac{(DVF)^2}{425}$$

Curvas Convexas con $S = DVP$ y $h_V = 1,37\ m$

$$K_V = \frac{(DVP)^2}{200\,\left(\sqrt{1,15} + \sqrt{1,37}\right)^2} = \frac{(DVP)^2}{1006}\ ; \qquad K_{V\,(NVV)} = \frac{(DVP)^2}{1100}$$

Acuerdos Cóncavos con $S = DVF$

$$\boldsymbol{K_V} = \frac{(\boldsymbol{DVF})^2}{\mathbf{200}\ (\mathbf{0,60} + \boldsymbol{DVF} \cdot \boldsymbol{tg}\ \mathbf{1°})} = \frac{(\boldsymbol{DVF})^2}{\mathbf{120} + \mathbf{3,49}\ \boldsymbol{DVF}} \quad ; \qquad \boldsymbol{K_{V\ (NVV)}} = \frac{(\boldsymbol{DVF})^2}{\mathbf{120} + \mathbf{3,5}\ \boldsymbol{DVF}}$$

Los valores de $\boldsymbol{K_V}$ para curvas convexas y visibilidad de paso son muy altos y las longitudes de curva son difíciles, si no imposibles de satisfacer. Por otra parte, se ha comprobado empíricamente que un alto porcentaje de conductores se exime de adelantar en las curvas verticales convexas, aún diseñadas con visibilidad de paso, por el temor a una colisión frontal cuando se invade el canal utilizado para la circulación contraria. En carreteras multicanal es obviamente innecesario diseñar las curvas convexas con Visibilidad de Paso. Por las razones expuestas los enlaces verticales convexos, generalmente, solo se diseñan con visibilidad de frenado.

La siguiente tabla muestra los valores de $\boldsymbol{K_V}$ para la Distancia de Visibilidad de Frenado según: a) Norma Vial Venezolana y b) AASHTO[18], para curvas verticales convexas y cóncavas:

$\boldsymbol{V_p}$ Km/h	*N.V.V.*			*AASHTO*		
	DVF	$-\boldsymbol{K_V}$	$\boldsymbol{K_V}$	*DVF*	$-\boldsymbol{K_V}$	$\boldsymbol{K_V}$
40	50	6	8	45	5	7
50	60	8	11	63	9	12
60	75	13	15	85	17	17
70	90	19	19	111	29	24
80	110	28	24	140	46	32
90	130	40	29	170	68	40
100	155	50*	36	205	99	50
110	180	76	43	244	140	61
120	210	100*	52	293	202	75

Tabla 21 Acuerdos Verticales Simétricos: Valores de Kv para Distintas DVF. Acuerdos Convexos: –Kv; Cóncavos: Kv.

Cotejando los valores del parámetro $\boldsymbol{K_V}$ en los dos grupos de la Tabla anterior se observan diferencias importantes derivadas de las distancias de visibilidad de frenado que cada organismo acoge para las Velocidades de Proyecto indicadas. Es por ello conveniente que las longitudes de curva vertical calculadas con estos parámetros, que son

---

18 *Acrónimo inglés de la “American Assotiation of State Highway Transportation Officials” (Asociación estadounidense de Funcionarios de Autopistas Estatales y Transporte).*

longitudes mínimas, se aumenten en la medida de lo posible para garantizar un diseño más seguro,

Puesto que para una velocidad determinada existe un solo valor de ***DVF***, es posible graficar, como una familia de curvas semejantes, las diversas rectas de la relación $\boldsymbol{A}$ contra $\boldsymbol{L_{CV}}$. Entrando en estas gráficas con la diferencia algebraica de pendientes, representada en el eje de las abscisas, y desplazándose verticalmente hasta interceptar la recta cuya velocidad sea la de proyecto, obtenemos un punto cuya horizontal, al cortar el eje de ordenadas, indica la longitud del acuerdo. En las páginas 186 y 187 se han representado las rectas de diseño con distancia de visibilidad de frenado para acuerdos convexos y cóncavos, respectivamente.

Como se observará en las referidas gráficas, los valores de $\boldsymbol{L_{CV}}$, tienen un mínimo absoluto. Así, para velocidades de proyecto de hasta 70 Km/h, la longitud mínima absoluta es de 30 m. Para velocidades superiores las longitudes mínimas absolutas de curva vertical aumentan, aparentemente, sin un criterio que pueda expresarse matemáticamente[19]. Tenemos así que, con las limitaciones que le son propias a una determinación gráfica, la longitud mínima absoluta de una curva vertical convexa para una velocidad de proyecto de 110 Km/h es 75 m.

Ejemplo:

$\boldsymbol{P_E}$ = + 1,5 %

$\boldsymbol{P_S}$ = – 2,5 %

$\boldsymbol{V_p}$ = 40 Km/h

$\boldsymbol{L_{CV}}$ mínima de acuerdo a la ***N.V.V.***

Diseño con visibilidad de frenado.

Solución:

$$\boldsymbol{A = P_s - P_E = -2,5 - (+\,1,5) = -2,5 - 1,5 = -4}\ \%$$

El valor negativo de la diferencia algebraica de pendientes indica que la curva es convexa. El $\boldsymbol{K_V}$ de las ***N.V.V.*** para 40 Km es –6% y entonces $\boldsymbol{L_{CV}}$ será:

---

19 *La norma vial venezolana de 1975 consideraba como longitud mínima absoluta de la curva vertical a aquella derivada de la aplicación de la fórmula Lcv = (0,5)Vp con Vp en Km/h. Así, para 110 Km/h la longitud mínima absoluta era: Lcv = (0,5)110 = 55 m valor que resulta más pequeño que el de la norma de 1985.*

$$K_V = \frac{(DVF)^2}{425} \qquad A = P_S - P_E \qquad L_{CV} = K_V \cdot A$$

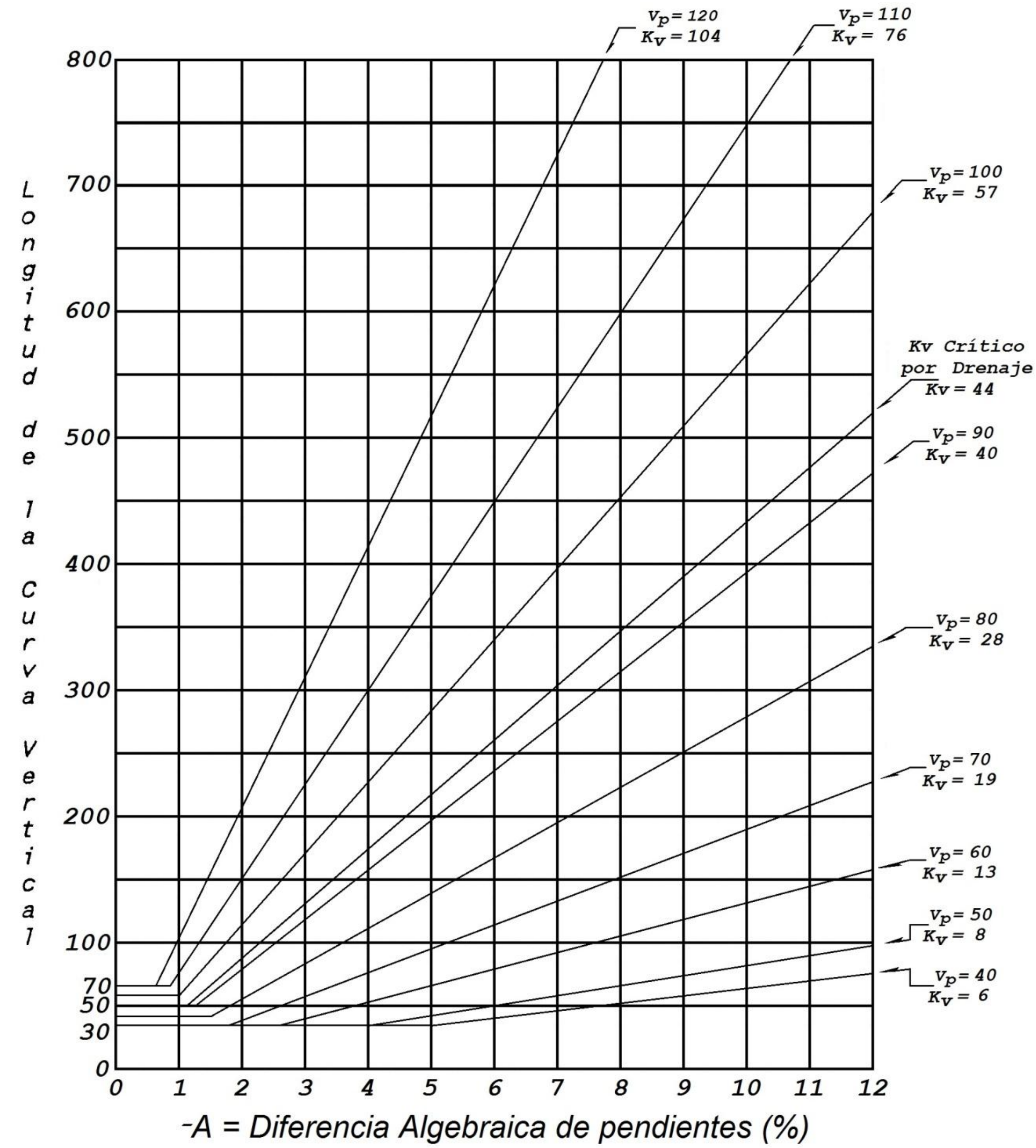


Figura 68 Acuerdos Verticales Convexos bajo el Criterio de Seguridad N.V.V.

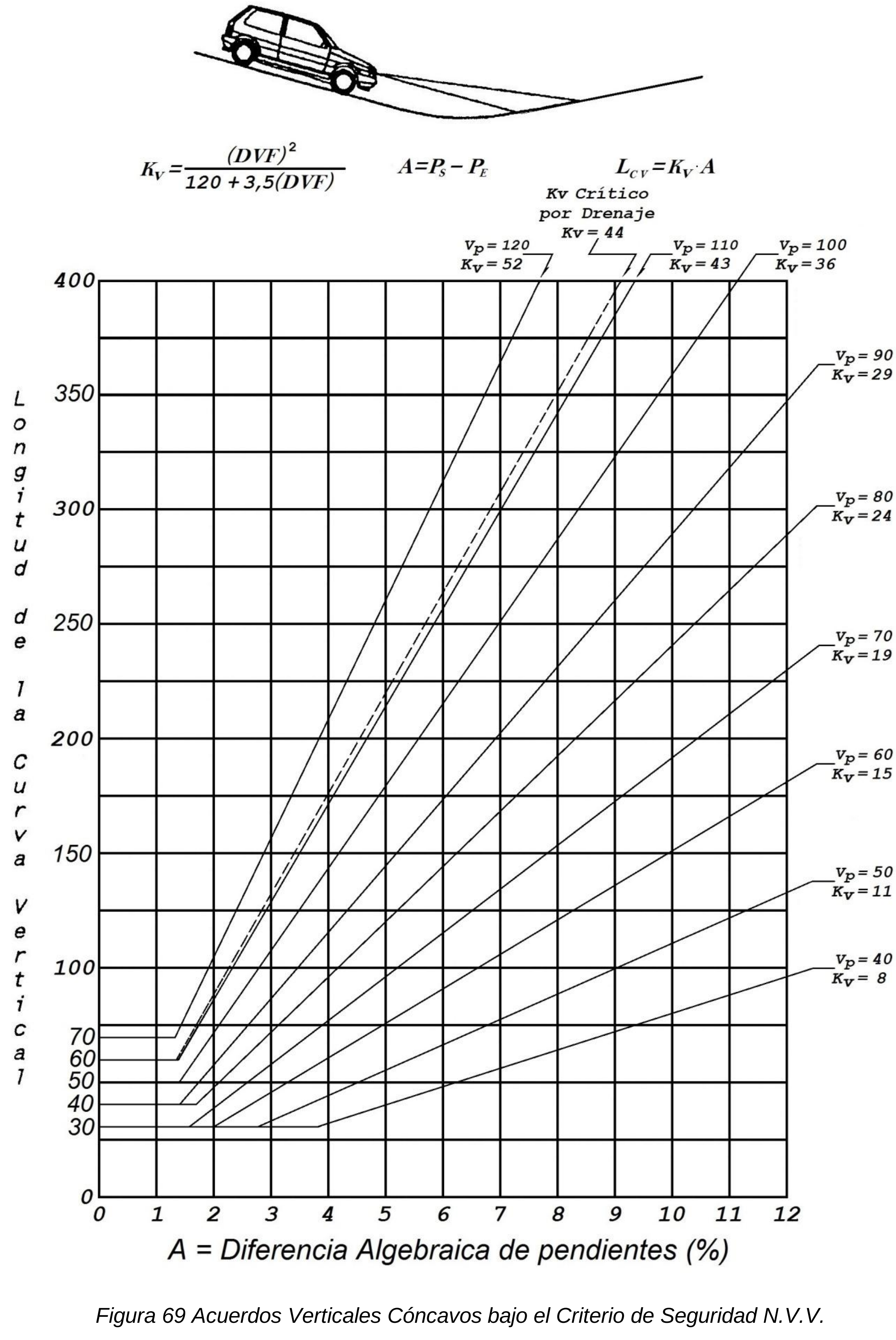


Figura 69 Acuerdos Verticales Cóncavos bajo el Criterio de Seguridad N.V.V.

$$L_{CV} = K_V \cdot A = -6\,(-4) = 24\ m$$

Vemos así que el valor de L_{CV} calculado es inferior al mínimo absoluto obtenido por la gráfica. Finalmente la longitud a emplear será 30 m.

Ejemplo:

P_E = – 4,5 %

P_S = – 2,5 %

V_p = 80 Km/h

L_{CV} mínima de acuerdo a la ***N.V.V.***

L_{CV} mínima según graficas

L_{CV} mínima bajo criterio ***AASHTO***

Diseño con visibilidad de frenado.

Solución:

$$A = P_S - P_E = -2,5 - (-4,5) = -2,5 + 4,5 = 2\ \%$$

El valor positivo de la diferencia algebraica de pendientes indica que el acuerdo a diseñar es cóncavo. De acuerdo al criterio de la ***N.V.V.*** la Distancia de Visibilidad de Frenado, para 80 Km/h, es 110 m por lo que el parámetro de la curva vertical será:

$$K_V = \frac{(DVF)^2}{120 + 3,5 \cdot DVF} = \frac{(110)^2}{120 + 3,5(110)} \cong 24$$

$$L_{CV} = A \cdot K_V = 2 \cdot 24 = 48\ m$$

$$L_{CV\ (gráfica)} = 46\ m$$

La ***AASHTO*** prescribe para 80 Km/H una ***DVF*** de 110 m. La longitud de la curva vertical es entonces:

$$L_{CV} = A\frac{(140)^2}{120 + 3,5(140)} \cong 2(32) = 64\ m$$

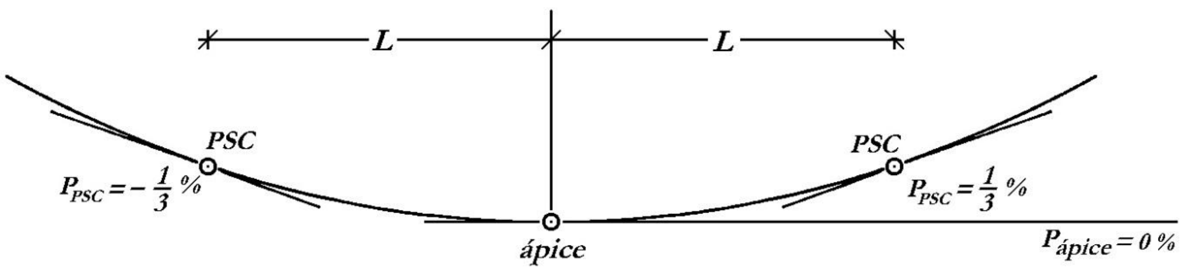
ACUERDOS VERTICALES DISEÑADOS BAJO EL CRITERIO DE DRENAJE

En los acuerdos verticales cuyas rectas de entrada y salida son de diferente signo, se produce, en algún punto de su longitud, una inflexión con la consiguiente anulación de la tangente. El punto donde ocurre el cambio de sentido de la curvatura es el ápice del enlace y los puntos de su entorno cercano —a lado y lado— presentan una pendiente muy pequeña que dificulta la evacuación rápida de las aguas que alcancen a caer sobre la calzada, sea esta agua proveniente de la lluvia directa o que escurra por los taludes de corte, particularmente en curvas de elevado parámetro.

El problema atañe tanto a curvas convexas como a cóncavas pero sobre todo a éstas últimas cuando el tramo, en las inmediaciones del ápice, ocurre en trinchera. Según criterio de la ***AASHTO*** no existen dificultades de drenaje cuando, en los puntos situados delante y atrás, a 50 pies del ápice, la pendiente $(\boldsymbol{P_{PSC}})$ está en el rango:

$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\% \geq \boldsymbol{P_{PSC}} \geq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\%$$

Tomando como origen plano-altimétrico el ápice de la curva se tiene:



$$\frac{\boldsymbol{P_{PSC}} - \boldsymbol{P}_{\text{á}\boldsymbol{pice}}}{\boldsymbol{L}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K_V}}$$

donde:

$$\boldsymbol{P_{PSC}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\% \quad ; \quad \boldsymbol{P}_{\text{á}\boldsymbol{pice}} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{L} = \mathbf{50(0,3048) = 15,25}\ \boldsymbol{m}$$

evaluando:

$$\boldsymbol{K_V} = \frac{\boldsymbol{L}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} = \boldsymbol{L}\cdot\mathbf{3} = \mathbf{15.25\cdot 3 = 45,75}\ \boldsymbol{m}/\%$$

La ***N.V.V.*** fija este valor crítico en 44 m/% y es usual su representación en los gráficos "Diferencia Algebraica de Pendientes contra Longitud de Curva Vertical" como una recta que define el límite para las consideraciones al drenaje. De esta manera los trazadistas, con el parámetro de diseño y la inspección visual de los gráficos identifican aquellas situaciones donde hay que dar al drenaje una especial atención, sobre todo si existen brocales o cunetas donde los materiales acarreados por las aguas de escorrentía pudieran acumularse impidiendo la evacuación rápida de las aguas y favoreciendo la peligrosa acumulación.

ACUERDOS VERTICALES DISEÑADOS BAJO EL CRITERIO DE APARIENCIA

Las consideraciones que se hacen en los acuerdos verticales en base a este criterio, también conocido como criterio de 'apreciación visual', tienden a atenuar la distorsión de la perspectiva que los conductores tienen al aproximarse a ellos. En efecto, para que una curva vertical convexa que acuerda dos rasantes uniformes con pequeña diferencia algebraica de pendientes, resulte adecuadamente percibida por el conductor, es necesario que su longitud no sea inferior a un mínimo. La experiencia empírica, acogida por varias legislaciones viales europeas, fija este mínimo como la distancia recorrida en 3,6 segundos por un vehículo que se desplace a la velocidad de proyecto; de ello resulta que:

$$\boldsymbol{L_{CV\,(mínima)} \geq V_p}$$

con: $\boldsymbol{L_{CV}}$ en metros y

$\boldsymbol{V_p}$ en Km/h

En las curvas cóncavas con pendientes de signo contrario la distorsión de la perspectiva es muy acentuada recibiendo el fenómeno el nombre de 'verticalización de la rasante de salida'. Esta manifestación aparente es tanto más evidente cuanto desde mas lejos el acuerdo pueda ser observado. En aquellos que coinciden con alineamientos horizontales rectos, donde durante el día es posible visualizar también gran parte de las longitudes rectas enlazadas, la distorsión perspectiva es tal, que los conductores, a pesar de disponer de visibilidad de paso, no adelantan pues suponen que la circulación contraria lo hace a velocidad muy superior a la propia.

La Norma Vial Venezolana solo considera el criterio de apariencia para las curvas verticales cóncavas y establece la longitud en base a la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{L_{CV} \geq 2\,V_p}$$

Esta longitud resulta el doble de la definida por el criterio anterior y para casi todas las velocidades de proyecto los valores de longitud llegan a superar los mínimos obtenidos de la aplicación del criterio de seguridad:

Ejemplo:

$\boldsymbol{P_E}$ = – 1,4 %

$\boldsymbol{P_S}$ = + 2,6 %

$\boldsymbol{V_p}$ = 100 Km/h

$\boldsymbol{L_{CV\,(apariencia)}}$ = ?

Solución:

$\boldsymbol{A = +4}$ % ; $\boldsymbol{K_V = 36}$; $\boldsymbol{L_{CV\,(seguridad)} = 144\ m}$; $\boldsymbol{L_{CV\,(apariencia)} = 200\ m}$